

Ein nicht-hydrostatisches Modell für Strömungen mit freier Oberfläche

Promotionsvortrag 12. November 1998

Jacek A. Jankowski

Gliederung

1. Einführung
2. Grundgleichungen
3. Ein hydrostatisches Modell
4. Ein nicht-hydrostatisches Modell
5. Verifikation
6. Zusammenfassung und Ausblick

Flache Gewässer



M.C. Escher *Pfütze*

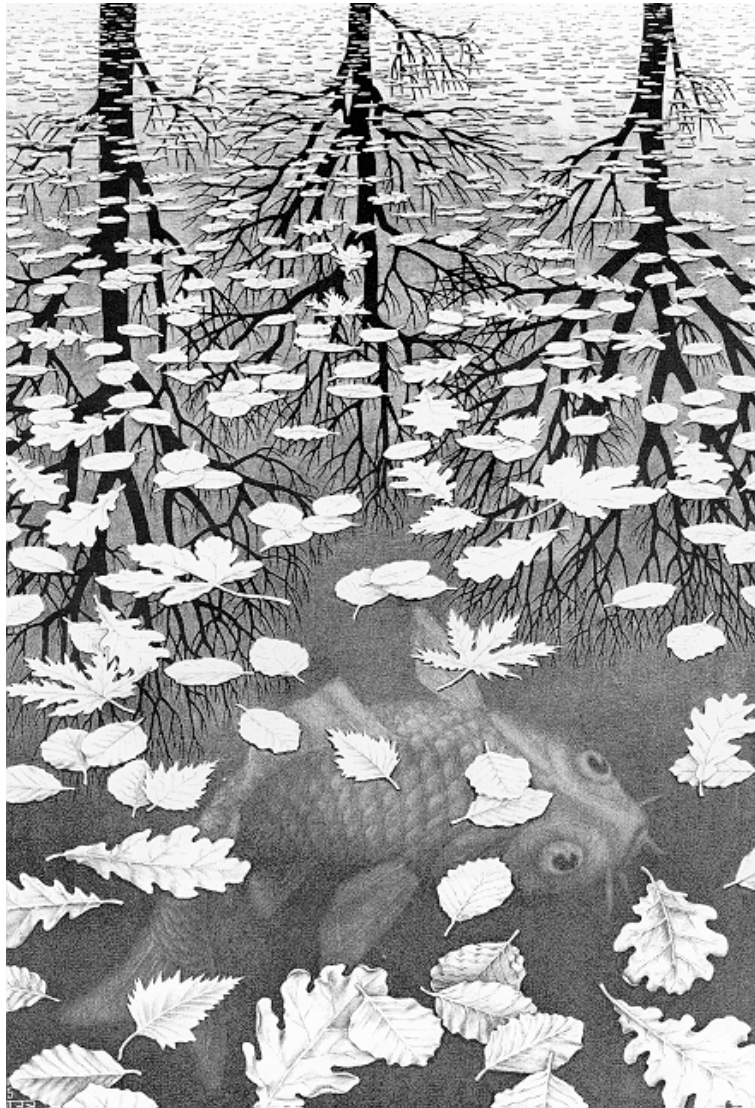
Merkmale:

- Wassertiefe \ll horizontale Ausdehnung
- Geschwindigkeiten überwiegend horizontal
- Vertikale Beschleunigungen gering

Konsequenzen für Modelle:

- > Hydrostatische Druckverteilung
- > Lange Wellen von kleiner Steilheit
- > Nur geringe Bodensteigungen erlaubt

Tiefe Gewässer



M.C. Escher *Drei Welten*

- > Vertikale Zirkulationen
- > Kurze Oberflächen- und interne Wellen
- > Strömungen über steilen Bodenhängen
- > Interaktion Strömung–Strukturen

Motivation

Wozu ein nicht-hydrostatisches Modell?

Für Simulation von 3D-Freispiegelströmungen,
in welchen:

- Die vertikalen Beschleunigungen *vergleichbar* oder *größer* als die horizontalen sind, und
- die Bewegungen der freien Oberfläche im Rahmen der Flachwassertheorie *nicht* beschreibbar sind.

Beabsichtigt für anspruchsvolle Anwendungen,
in welchen die richtige Reproduktion von
dreidimensionalen Aspekten der Strömungen
entscheidend ist.

Grundlegende Ideen

- Ausgangspunkt: Ein existierendes hydrostatisches Modell.
- Modellauswahl: Ein wohl validiertes und etabliertes Modell.
- Entwicklung: Im Rahmen eines entkoppelten Algorithmus.
- Zerlegung des Gesamtdruckes in einen hydrostatischen und hydrodynamischen Anteil.
- Verifikation: Hauptsächlich die vertikalen Beschleunigungen.

Warum TELEMAC-3D?

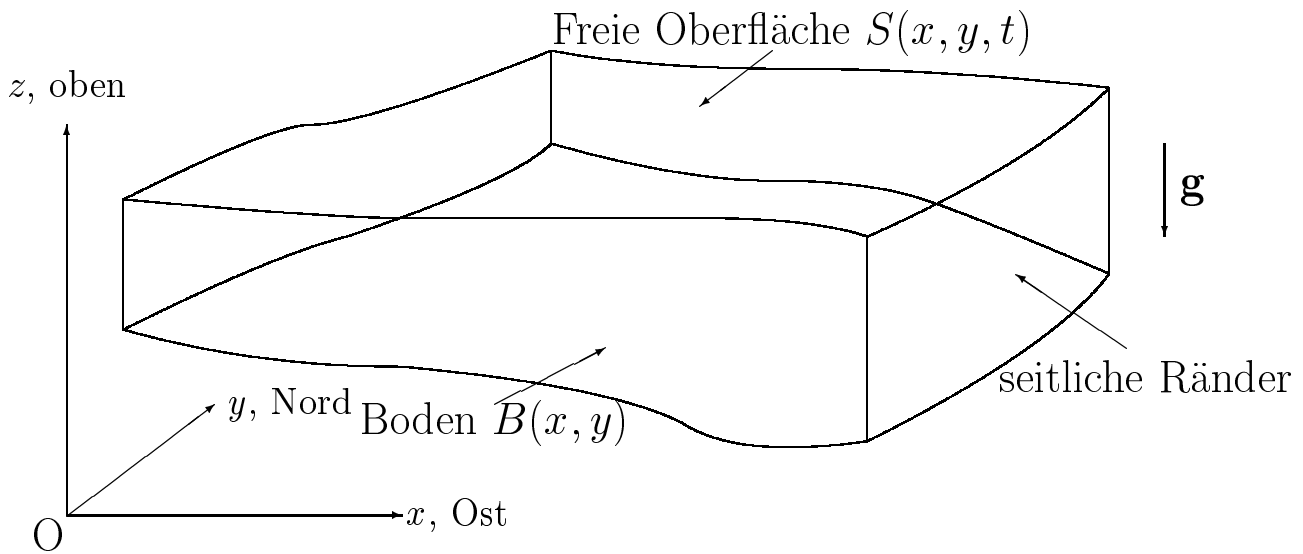


C.Monet *Bad am La Grenouillère*

TELEMAC-System entwickelt von
Laboratoire National d'Hydraulique (EDF)
in Chatou

- Löst 3D-Flachwassergleichungen
- Ein entkoppelter Algorithmus mit FEM
- Modular aufgebaut
- Vorbildlich verifiziert und validiert
- Bedeutende institutseigene Entwicklungen

Grundlagen



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

⇒ Primitive Variablen: $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$

⇒ Lage der freien Oberfläche: $S(x, y, t)$

⇒ Vereinfachungen:

- Inkompressibilität
- Wirbelviskosität
- Boussinesq-Approximation

Grundgleichungen: Echt dreidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - w f_H + v f_V + \nabla \cdot (\nu \nabla u)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - u f_V + \nabla \cdot (\nu \nabla v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g + u f_H + \nabla \cdot (\nu \nabla w)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho = \rho(T_i) \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_i = \nabla \cdot (\nu_{T_i} \nabla T_i)$$

Bemerkung: Gültig für inkompressible Strömungen mit kleinen Veränderungen der Fluidichte.

Annahmen betreffen nur wenige Fluid- oder Strömungseigenschaften.

Konventionelle Druck-Poisson-Gleichung

Hergeleitet aus

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot (\nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{f}$$

Dirichletsche Randbedingung:

$$P = \nu \frac{\partial u_n}{\partial n} - F_n$$

Neumannsche Randbedingung:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla P = \mathbf{n} \cdot \left(\nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{f} \right) =$$
$$\nu \nabla^2 u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla u_n + f_n$$

Die hydrostatische Druckapproximation

Dimensionsanalyse

$$\begin{aligned} & \boxed{\frac{HW}{LU} \left(\frac{\partial w_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial w_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial w_*}{\partial y_*} \right) + \frac{W^2}{U^2} w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*}} = \\ & = -\frac{\partial p_*}{\partial z_*} - \frac{gH}{U^2} \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{f_H H}{U} u_* + \\ & + \nu_H \frac{HW}{L^2 U^2} \left(\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} \right) + \frac{\nu_z}{LU} \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} \end{aligned}$$

\implies Die vertikale Komponente der Beschleunigung dw/dt ist vernachlässigbar, wenn

$$W \ll U \quad \text{und} \quad H \ll L.$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g}$$

Dreidimensionale Flachwassergleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v f_V + \nabla \cdot (\nu \nabla u)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - u f_V + \nabla \cdot (\nu \nabla v)$$

$$\begin{aligned} p &= \int_z^S \rho g dz = \int_z^S (\rho_0 + \Delta \rho) g dz \\ &= \underbrace{\rho_0 g (S - z)}_{\text{barotrop}} + \underbrace{\rho_0 g \int_z^S \frac{\Delta \rho}{\rho_0} dz}_{\text{baroklin}} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho = \rho(T_i) \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_i = \nabla \cdot (\nu_{T_i} \nabla T_i)$$

Bemerkung: Vertikale Bewegung entsteht als Folge der Volumenerhaltung.

TELEMAC-3D in Stichworten

- Gleichungen:** – 3D-Flachwassergleichungen
Transportgleichungen für Temperatur,
Stoffkonzentration, Sediment...
Reaktionskinetik, *particle-tracking*-Modell
- Randbed.:** – Üblich für natürliche Gewässer
- Numerik:** – Diskretisierung: Zeit: FDM, Raum: FEM
Operator-splitting-Verfahren (3 Stufen)
Crank-Nicolson-Methode
Element-by-element-Methode
Iterative Gleichungslöser (konjug. Gradienten)
- Turbulenz:** – Konstante Wirbelviskosität,
Mischungswegansatz, k - ϵ -Modell
- Netz:** – Horizontal: Unstrukturiert – Dreiecke
Vertikal: σ -Netz mit konstanter
Anzahl der Schichten
- Elemente:** – Prismen, lineare Ansatzfunktionen
- Aufbau:** – Modular auf Bibliothekenbasis
- Rechner:** – Vektor- oder Parallelcomputer

TELEMAC-3D – Algorithmus

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^{diff}}{\Delta t} + \frac{f^{diff} - f^{adv}}{\Delta t} + \frac{f^{adv} - f^n}{\Delta t}$$

Advektion:

$$\frac{f^{adv} - f^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0$$

Diffusion:

$$\frac{f^{diff} - f^{adv}}{\Delta t} = \nabla \cdot (\nu_f \nabla f)$$

Druck – freie Oberfläche – Kontinuität:

$$\frac{u^{n+1} - u^{diff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f_V v^n$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{diff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f_V u^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ein *entkoppelter* Algorithmus im Rahmen der FEM

Gekoppelte Algorithmen:

- Aufbau eines größeren Gleichungssystems.
- Fast immer implizit.
- Nicht-lineare, iterative Gleichungslöser.
- Gemischte Interpolation für Variablen. In der Praxis: \implies Verlust der Genauigkeit für den Druck.

Entkoppelte Algorithmen:

- Sukzessive Lösung kleiner Aufgaben.
- Semi-implizit.
- Lineare Gleichungslöser.
- Gleiche Interpolation für alle Variablen.
 \implies Gleiche Genauigkeit.

Freie Oberfläche: *Höhenfunktionsmethode*

Bestimmung von $S(x, y, t)$, definiert als Abstand zwischen der freien Oberfläche und einer horizontalen Bezugsfläche (z.B. $z = 0$).

- Kinematische Randbedingung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u_s \frac{\partial S}{\partial x} - v_s \frac{\partial S}{\partial y} + w_s$$

- Vertikal gemittelte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_B^S u dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_B^S v dz$$

$\implies S(x, y, t)$ muß *eindeutig* sein!

Projektionsmethode – *fractional-step* – Formulierung

Zerlegung der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} + \frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \neq 0 \end{array} \right.$$

Zwischenlösung:

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = + \frac{\varrho}{\varrho_0} \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$$

Projektion:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla p$$

Druck-Poisson-Gleichung aus der
fractional step – Formulierung:

$$\nabla^2 p = \frac{\varrho_0}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

Druckzerlegung

Druck als Summe vom *hydrostatischen* p_H und *hydrodynamischen* Druckanteil π :

$$p = p_H + \pi$$

Hydrostatischer Anteil:

$$\begin{aligned} p_H &= \int_z^S \varrho g dz = \int_z^S (\varrho_0 + \Delta\varrho) g dz \\ &= \varrho_0 g (S - z) + \varrho_0 g \int_z^S \frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} dz \end{aligned}$$

Horizontale Druckgradienten:

$$-\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial S}{\partial x} - g \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_z^S \frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} dz \right] - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \pi}{\partial x}$$

Vertikaler Druckgradient:

$$-\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varrho}{\varrho_0} g = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial \pi}{\partial z}$$

Fractional step – Projektionsmethode für Freispiegelströmungen

Zwischenlösung:

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -g \frac{\partial S}{\partial x} - g \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_z^S \frac{\Delta \rho}{\rho_0} dz \right] - w f_H + v f_V + \nabla \cdot (\nu \nabla u)$$

$$\frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -g \frac{\partial S}{\partial y} - g \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_z^S \frac{\Delta \rho}{\rho_0} dz \right] - u f_V + \nabla \cdot (\nu \nabla v)$$

$$\frac{\tilde{w} - w^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = u f_H + \nabla \cdot (\nu \nabla w)$$

Druck-Poisson-Gleichung für den *hydrodynamischen*
Druck:

$$\nabla^2 \pi = \frac{\rho_0}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$$

Projektion:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \pi}{\partial x} \\ \frac{v^{n+1} - \tilde{v}}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \pi}{\partial y} \\ \frac{w^{n+1} - \tilde{w}}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \pi}{\partial z} \end{aligned}$$

Lage der freien Oberfläche:

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t} = -u_s \frac{\partial S}{\partial x} - v_s \frac{\partial S}{\partial y} + w_s$$

Operator-splitting – Algorithmus

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{diff}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}^{diff} - \mathbf{u}^{adv}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}^{adv} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}$$

1. Quellenterme (2D/3D, in FE):

$$\mathbf{F}_u = -g \nabla_H S^n - g \nabla_H \left[\int_z^{S^n} \frac{\Delta \varrho^n}{\varrho_0} dz \right] - 2\Omega \times \mathbf{u}^n$$

2. Advektionsstufe (3D, hyperbolisch):

$$\frac{\mathbf{u}^{adv} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$$

3. Diffusionstufe (3D, parabolisch):

$$\frac{\mathbf{u}^{diff} - \mathbf{u}^{adv}}{\Delta t} = \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{F}_u$$

4. Poisson-Gleichung (3D, elliptisch):

$$\nabla^2 \pi = \frac{\varrho_0}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{diff}$$

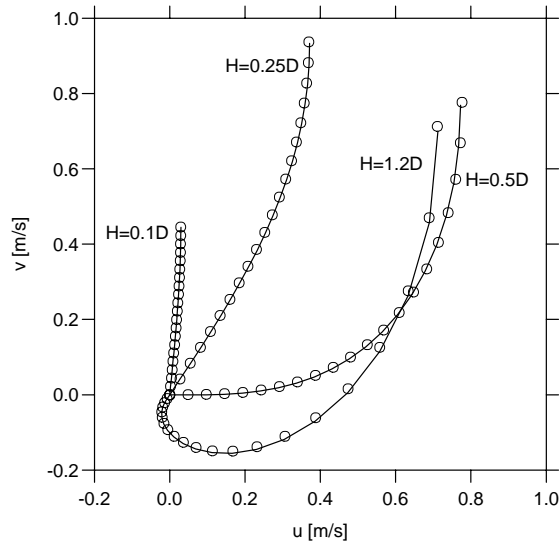
5. Projektion der Geschwindigkeit (3D, in FE):

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{diff}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla \pi$$

6. Freispiegelstufe (2D, hyperbolisch):

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t} = -u_s \frac{\partial S}{\partial x} - v_s \frac{\partial S}{\partial y} + w_s$$
$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-B}^S u dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-B}^S v dz$$

Verifikation: Stufen des Algorithmus

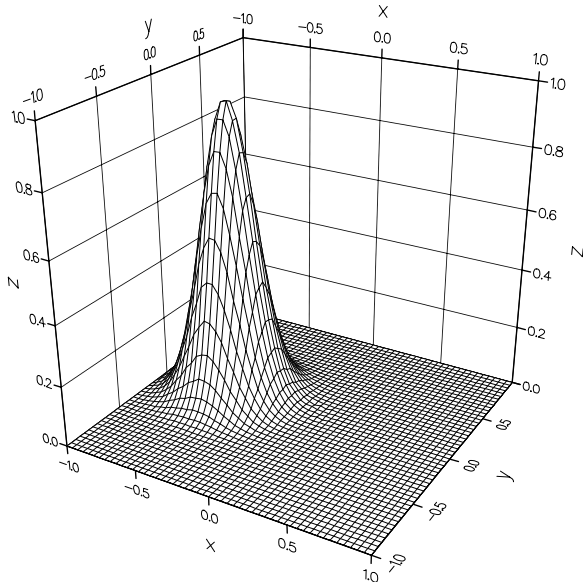
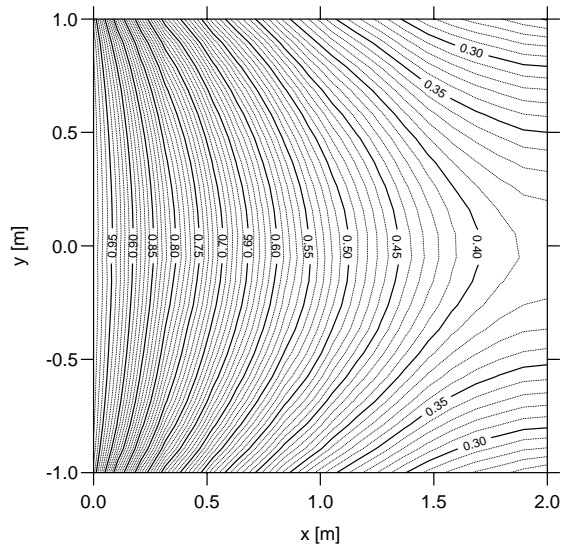


Diffusionsstufe,
semi-implizit, FEM:
⇐ Die Ekman-Spiralen

Poisson-Gleichung:

FEM

Temperaturverteilung ⇒



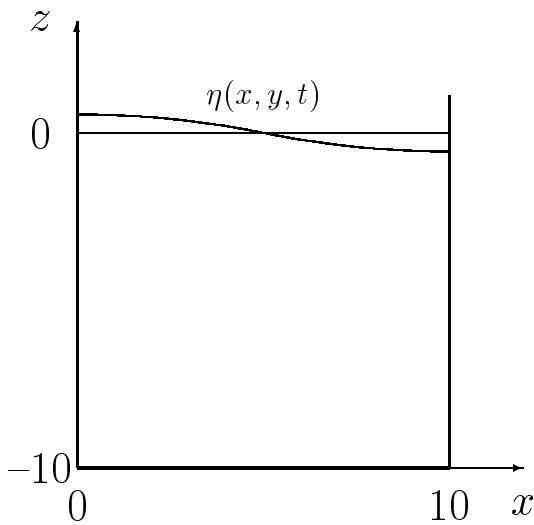
2D-Advektionsstufe:
semi-implizit SUPG, FEM
oder Charakteristiken
⇐ Ein rotierendes Profil

Verifikationsbeispiele

Vollständiger Algorithmus

- ⇒ Kurze stehende Wellen.
- ⇒ Wellenreflexion.
- ⇒ Wellen in einem Hafenbecken.
- ⇒ Wellen über einer Rinne.
- ⇒ Einzelwellen in einem Kanal.
- ⇒ Interaktion zwischen Einzelwellen.
- ⇒ Transformation einer Einzelwelle.
- ⇒ Brechen einer Einzelwelle.
- ⇒ Kurze interne Wellen.
- ⇒ Lock-exchange flow.
- ⇒ Kanal mit einer Schwelle.
- ⇒ Wingetriebene Zirkulation.
- ⇒ Kanalströmung über einer Rampe.

Stehende kurze Welle



⇒ kleine Amplitude
 ⇒ ein rechteckiges Becken

$$\eta = \eta_0 \cos(kx) \cos(\omega t)$$

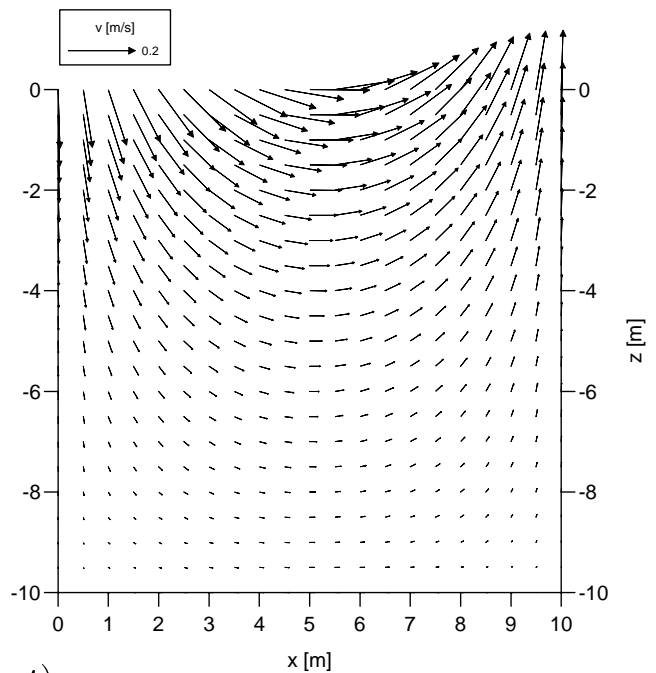
Nicht-hydrostatisch

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$

$$u = \omega \eta_0 \frac{\text{ch}[k(z+H)]}{\text{sh}(kH)} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

$$w = -\omega \eta_0 \frac{\text{sh}[k(z+H)]}{\text{sh}(kH)} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

$$\pi = -\rho g \eta + \rho g \eta_0 \frac{\text{ch}[k(z+H)]}{\text{ch}(kH)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$



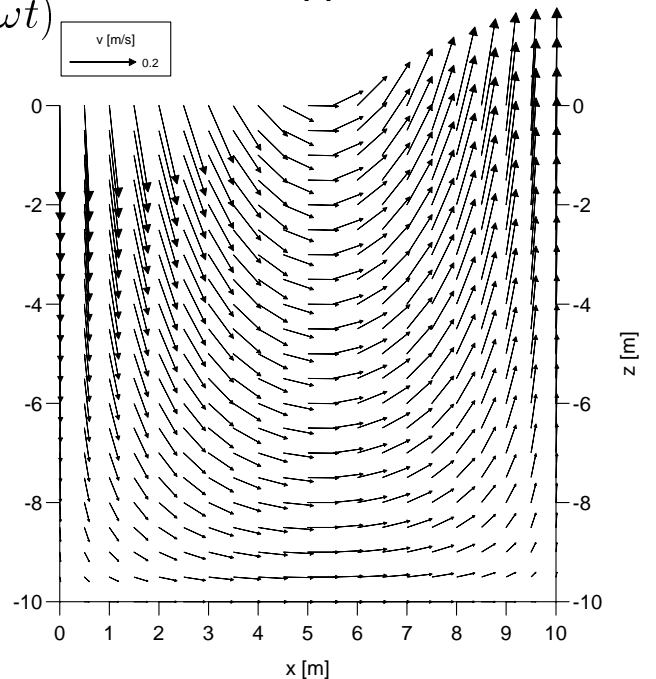
Hydrostatisch

$$\omega^2 = k^2 g H$$

$$u = \frac{\omega \eta_0}{kH} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

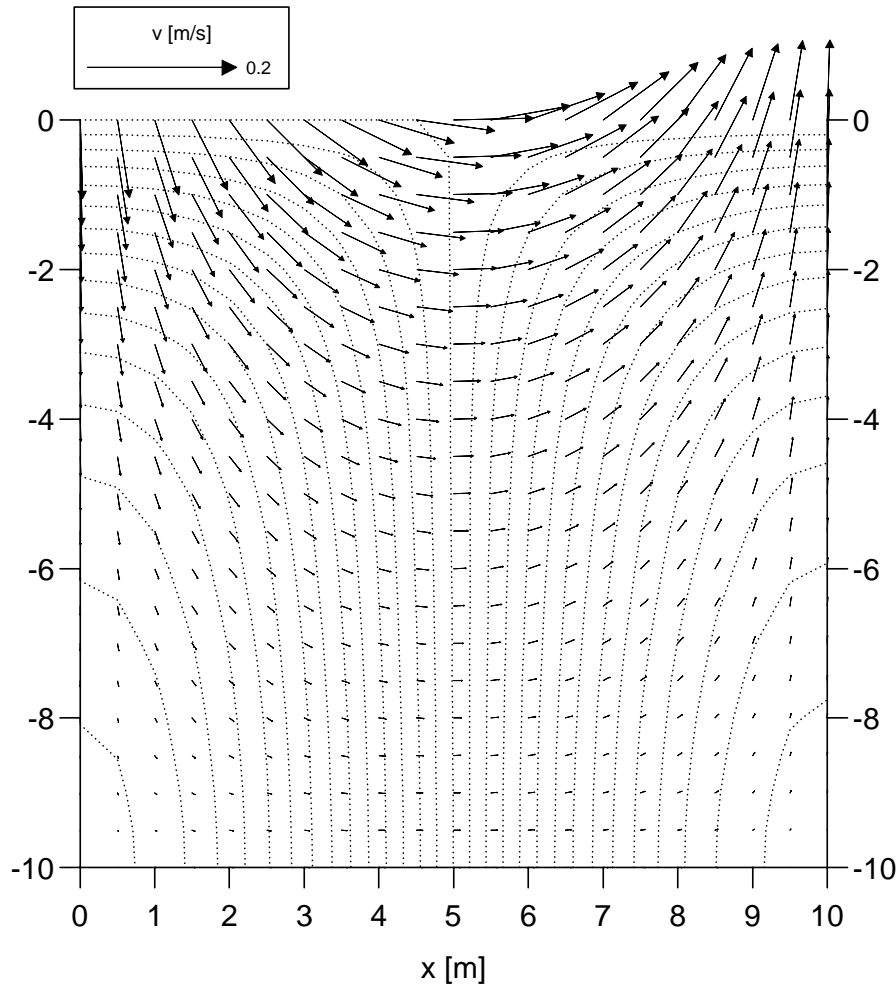
$$w = -\omega \eta_0 \frac{z+H}{H} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

$$\pi = 0$$

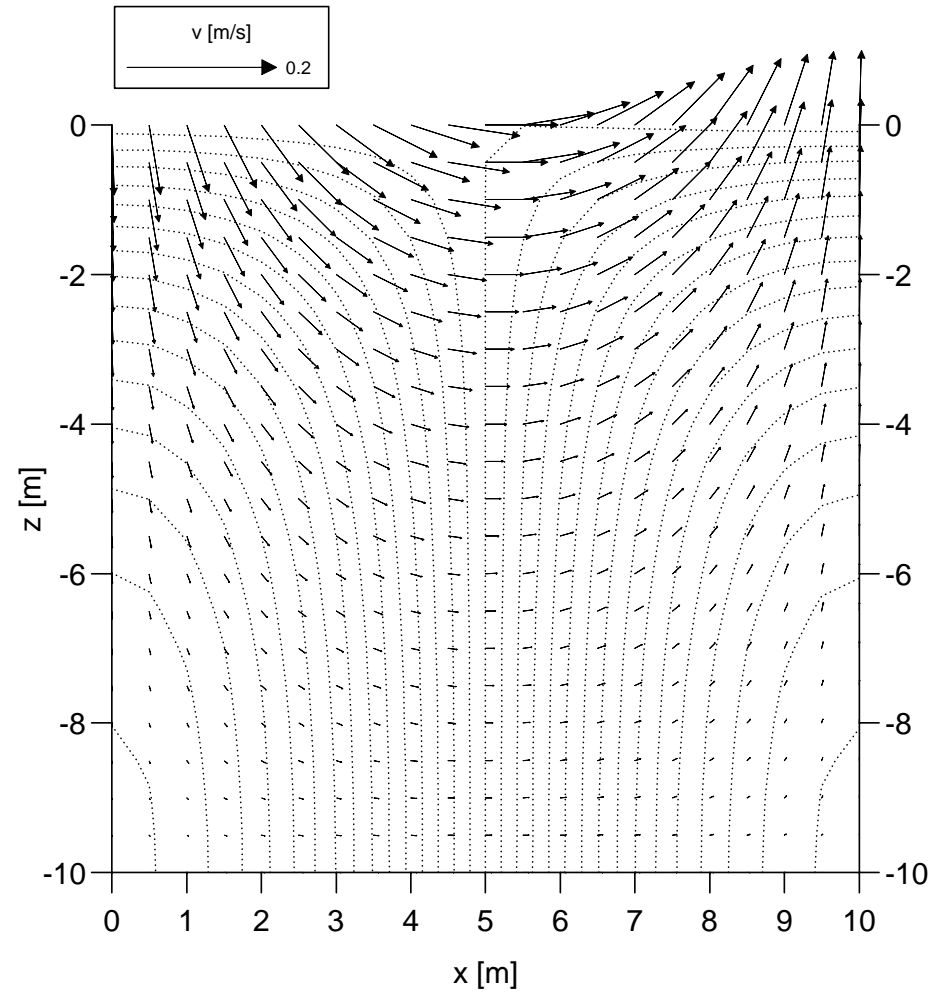


Stehende kurze Welle

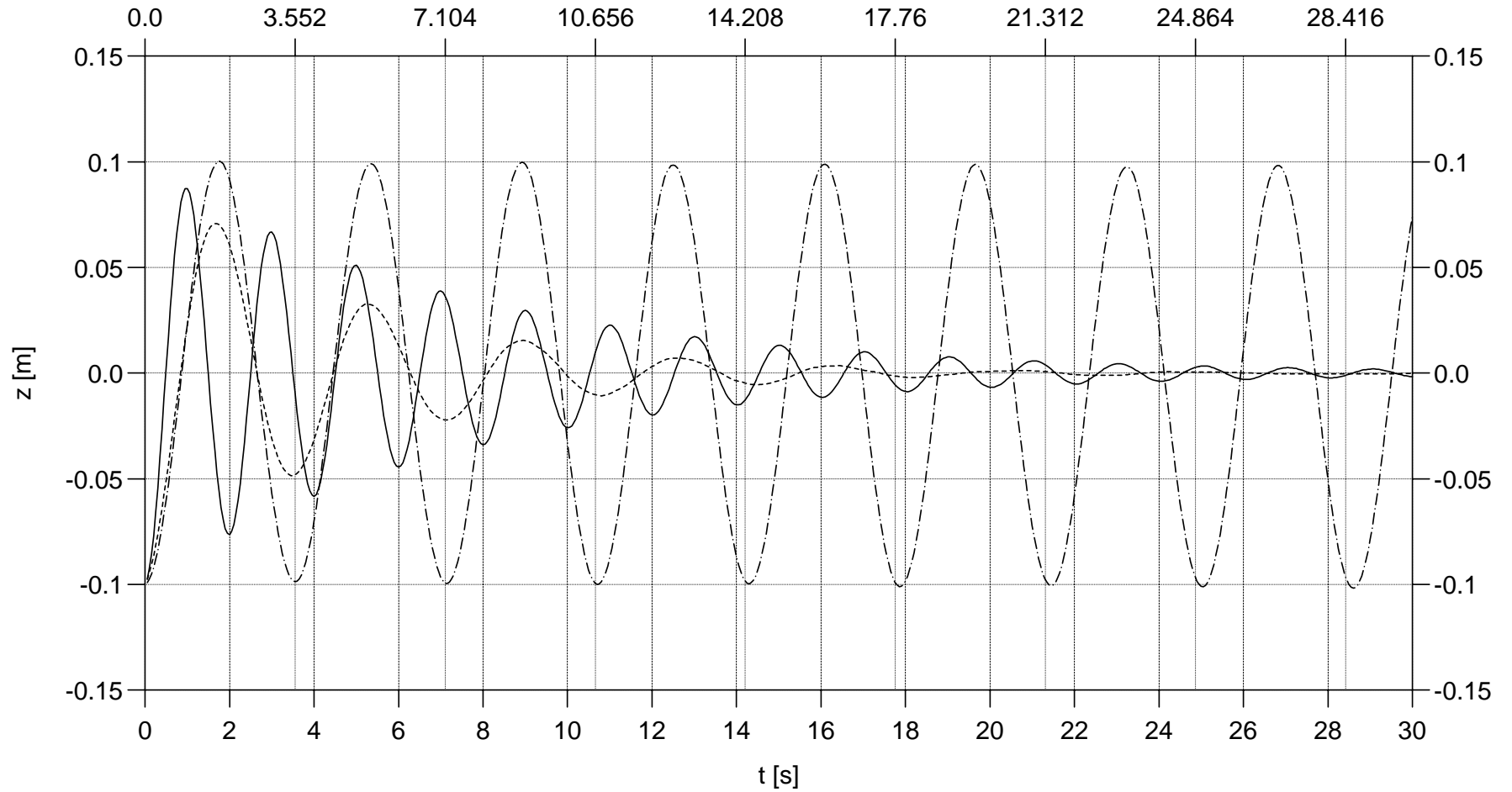
numerisch



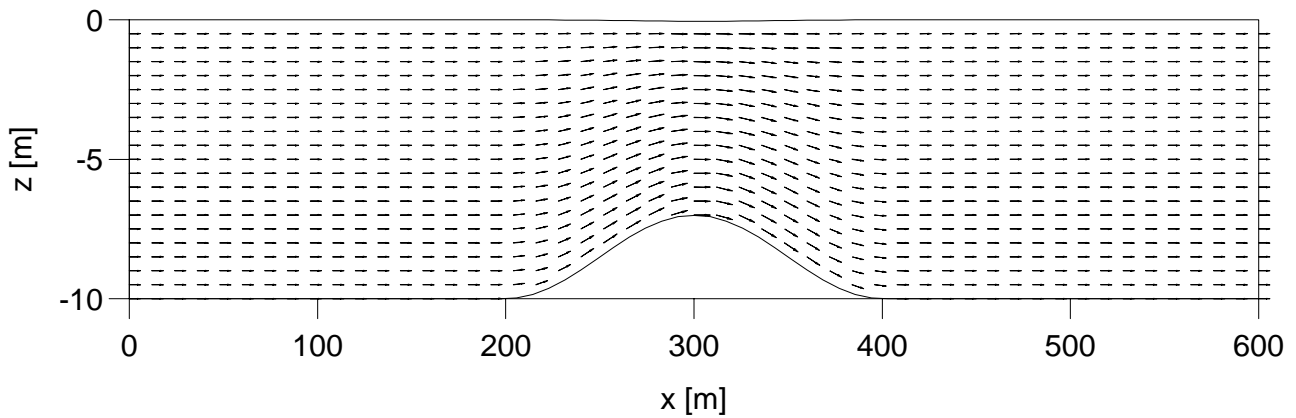
analytisch



Wasserspiegelauslenkung am Rand

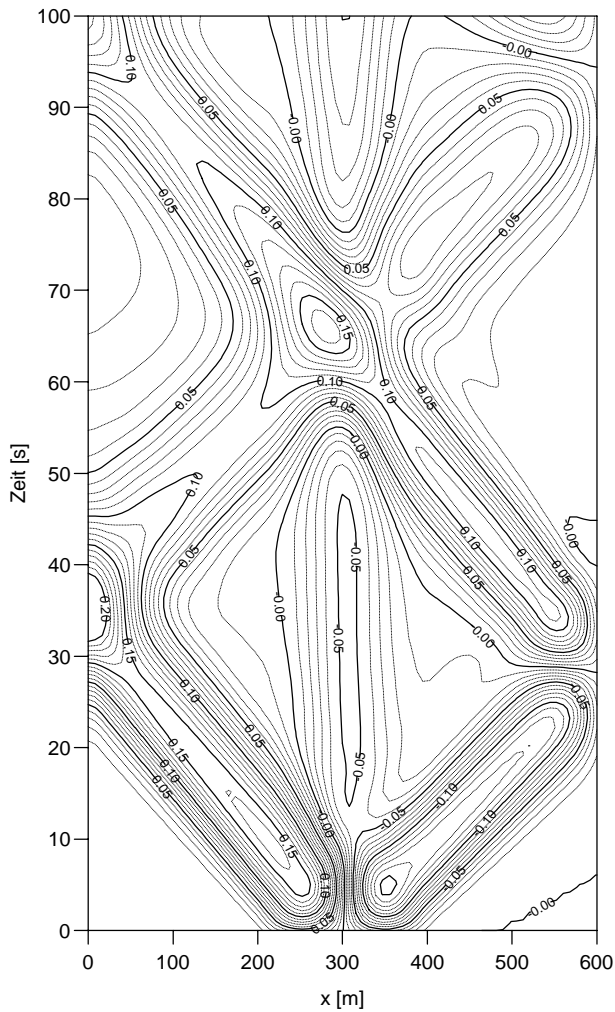


Kanal mit einer Schwelle

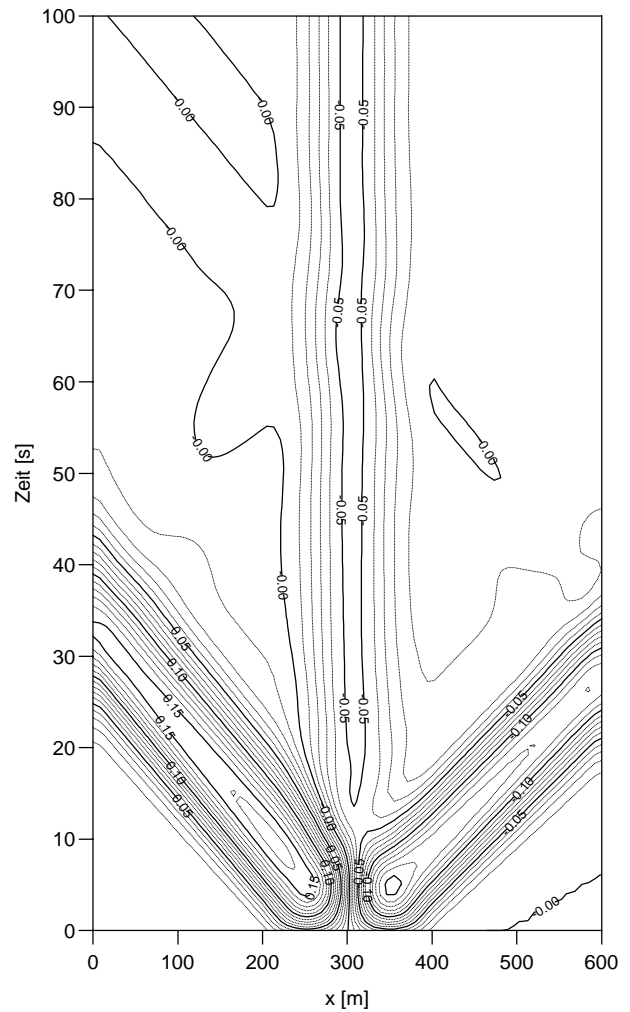


Nicht-reflektierende Randbedingungen

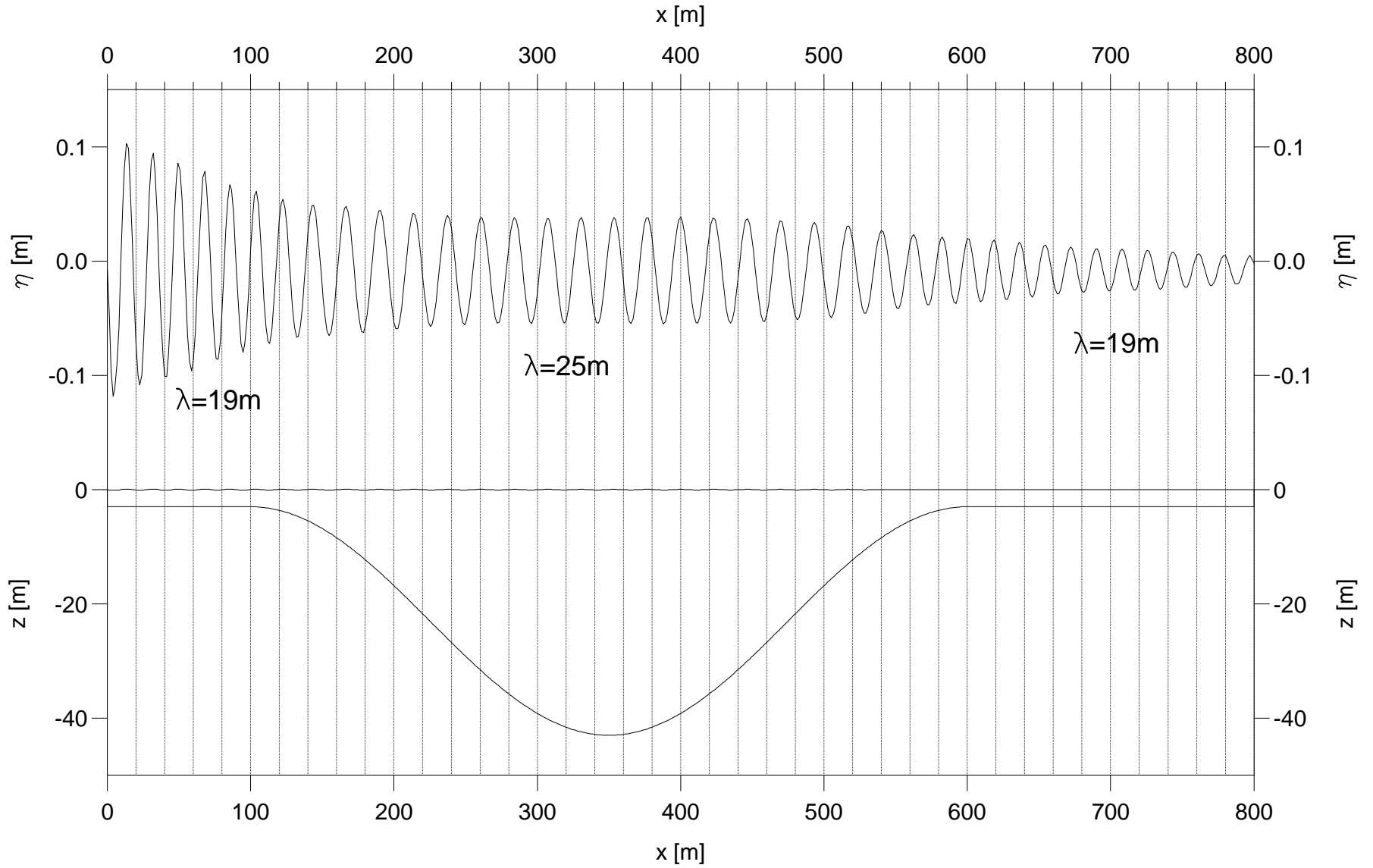
ohne



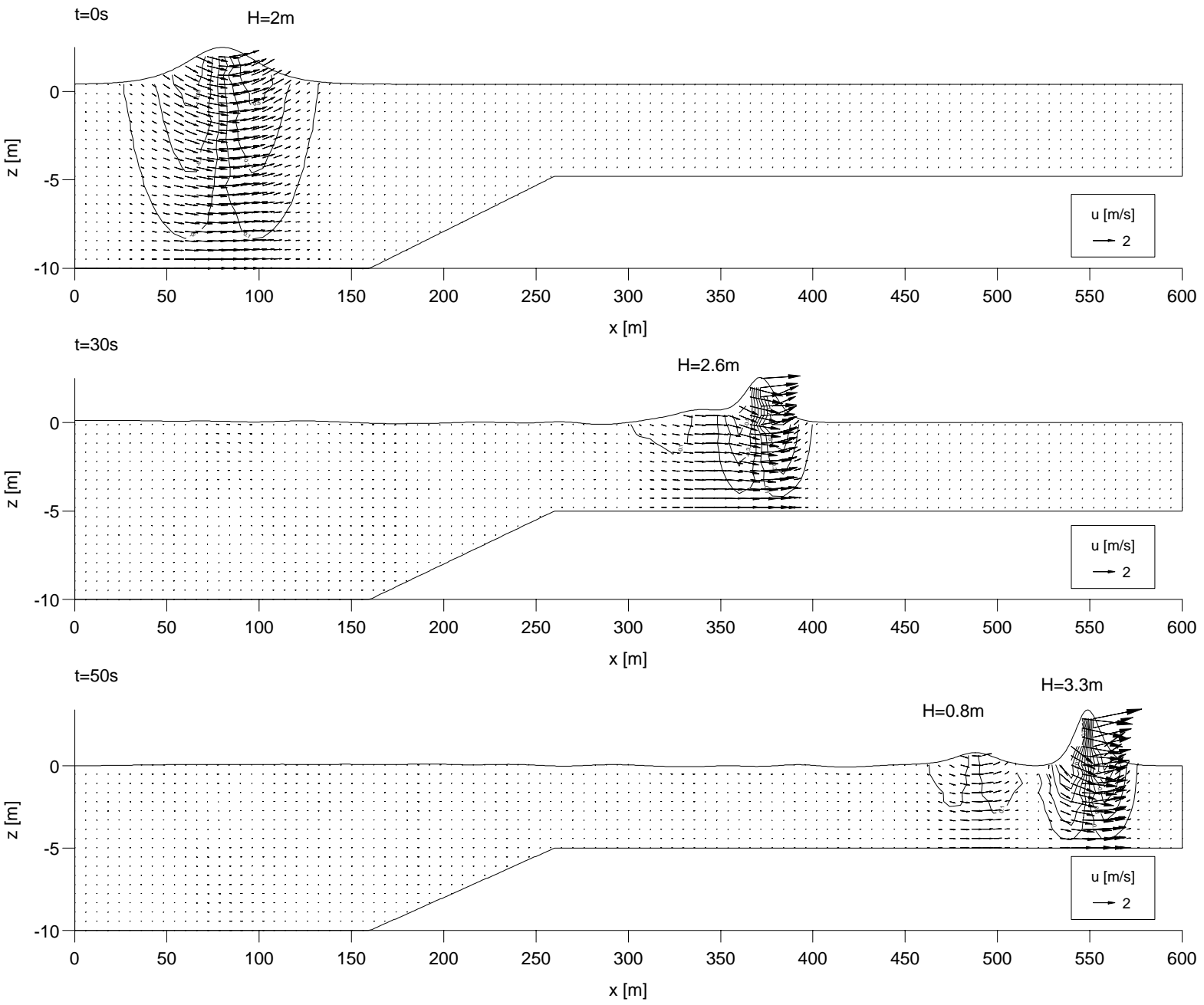
mit



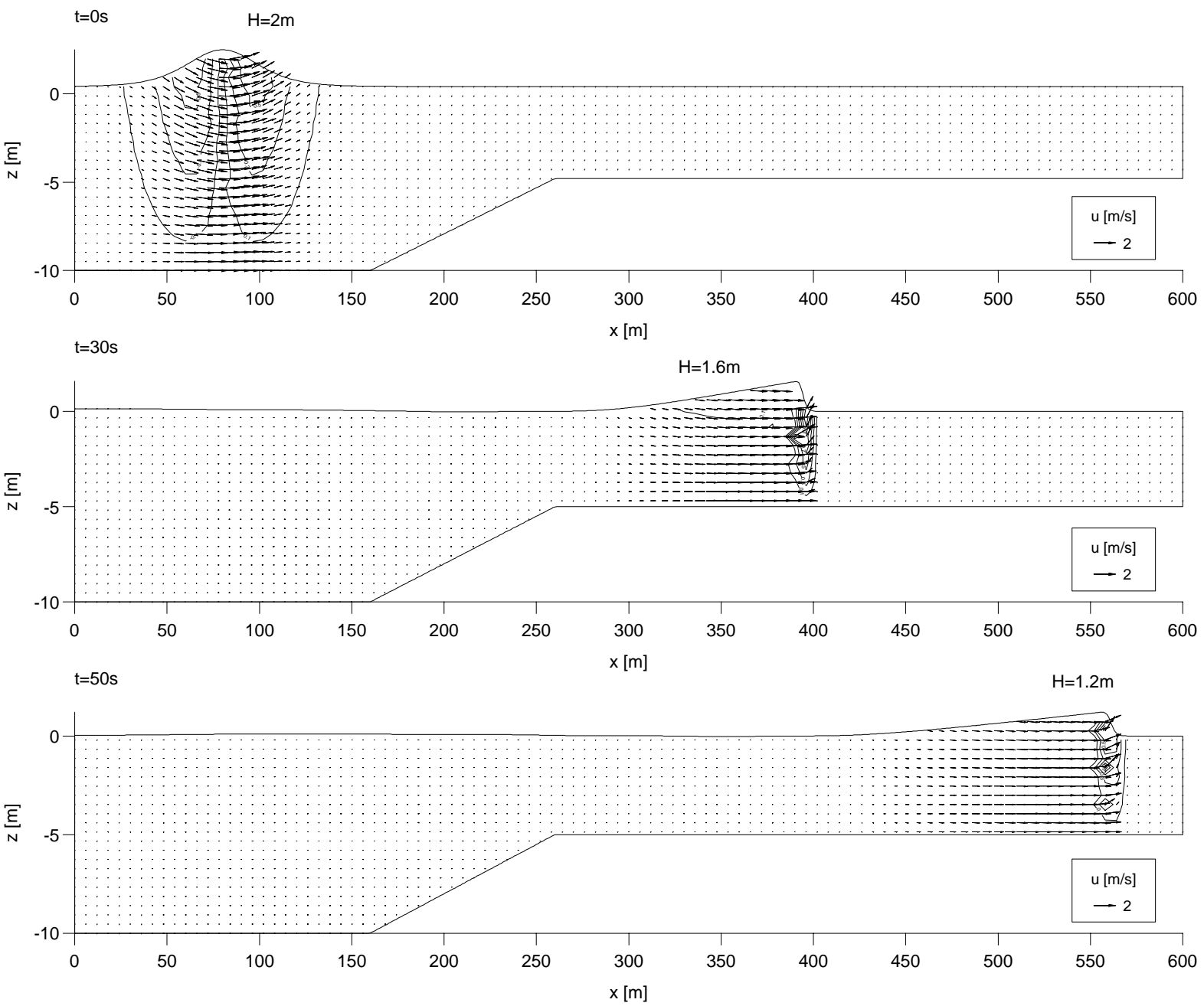
Wellen über einer Rinne



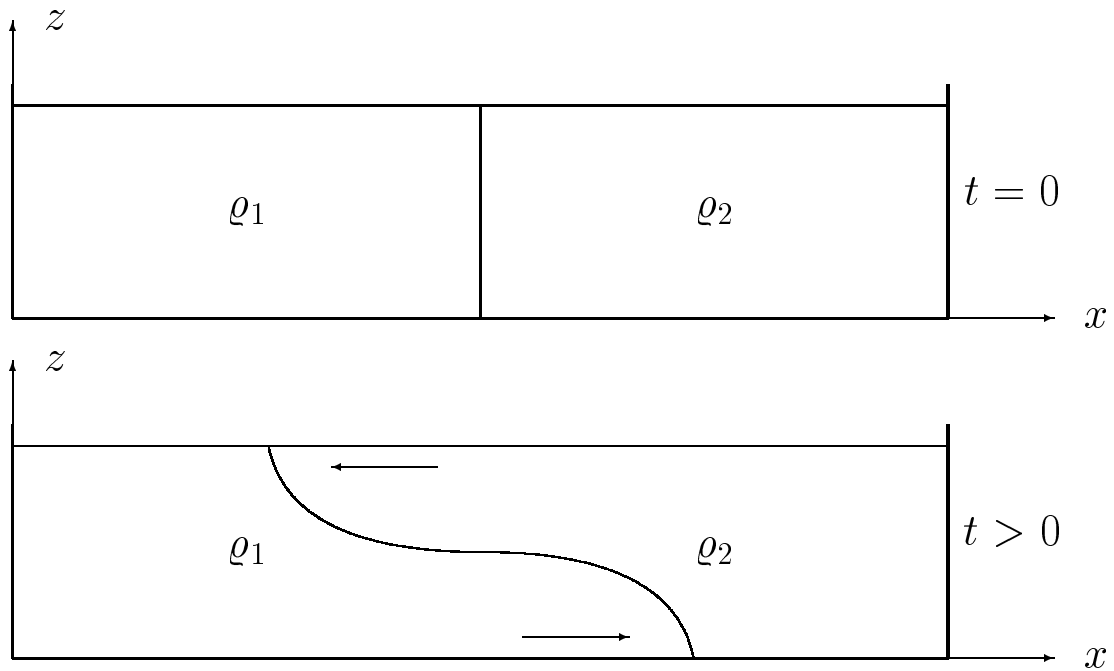
Transformation einer Einzelwelle ohne hydrostatische Approximation



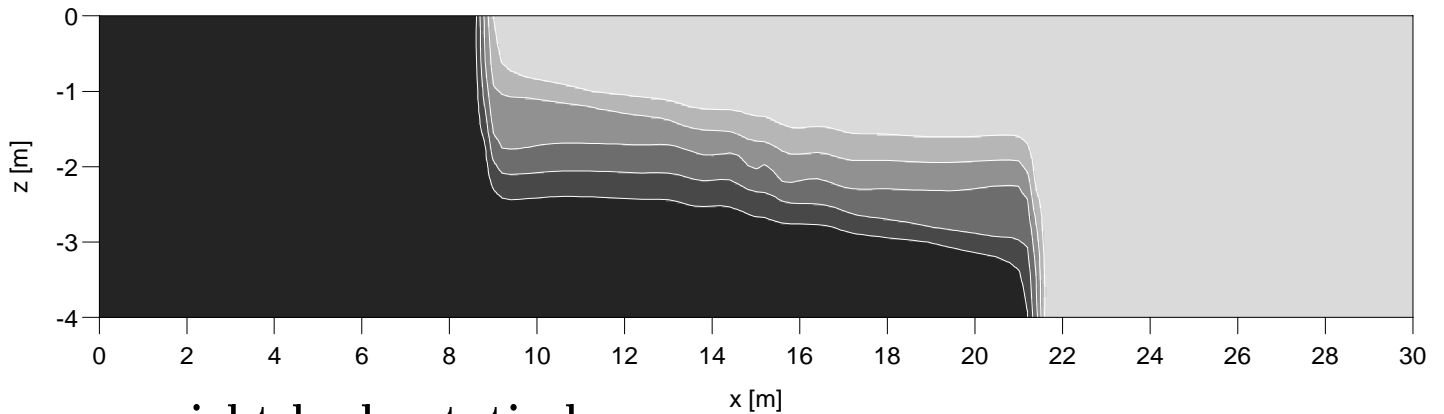
Transformation einer Einzelwelle mit hydrostatischer Approximation



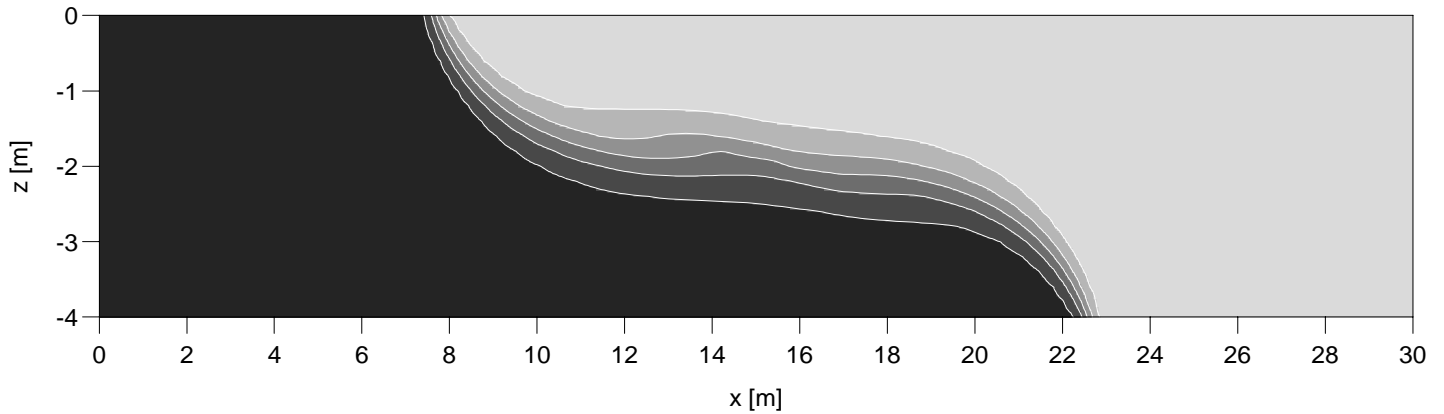
Lock exchange flow



hydrostatisch

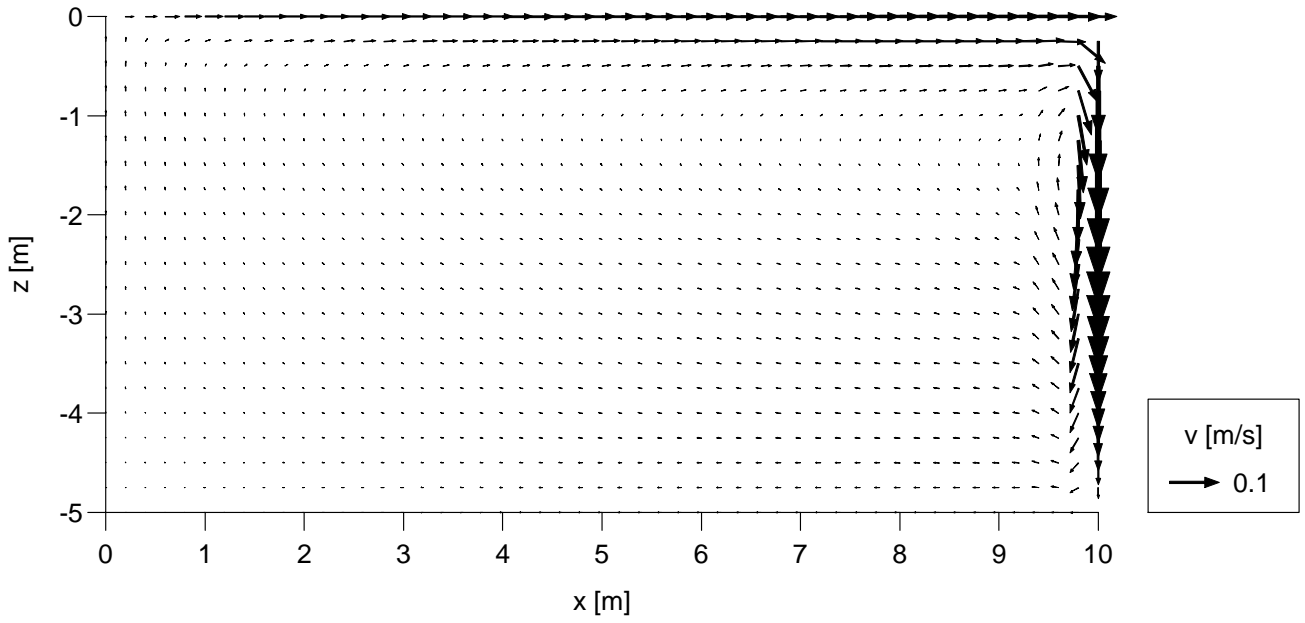


nicht-hydrostatisch

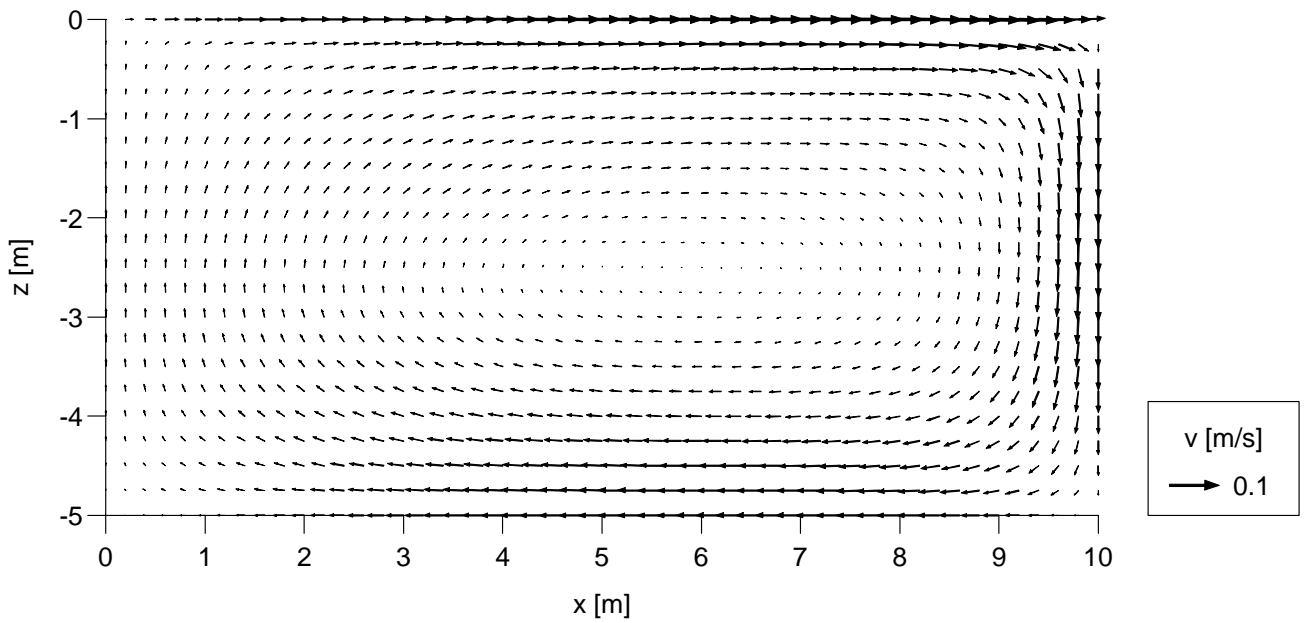


Windgetriebene Zirkulation

hydrostatisch

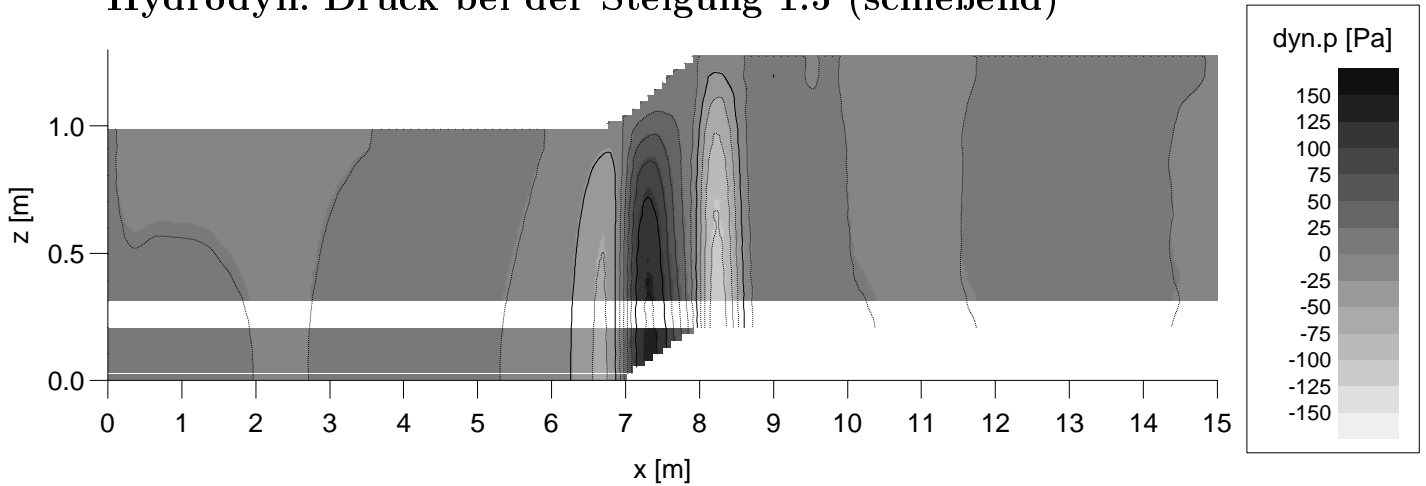


nicht-hydrostatisch

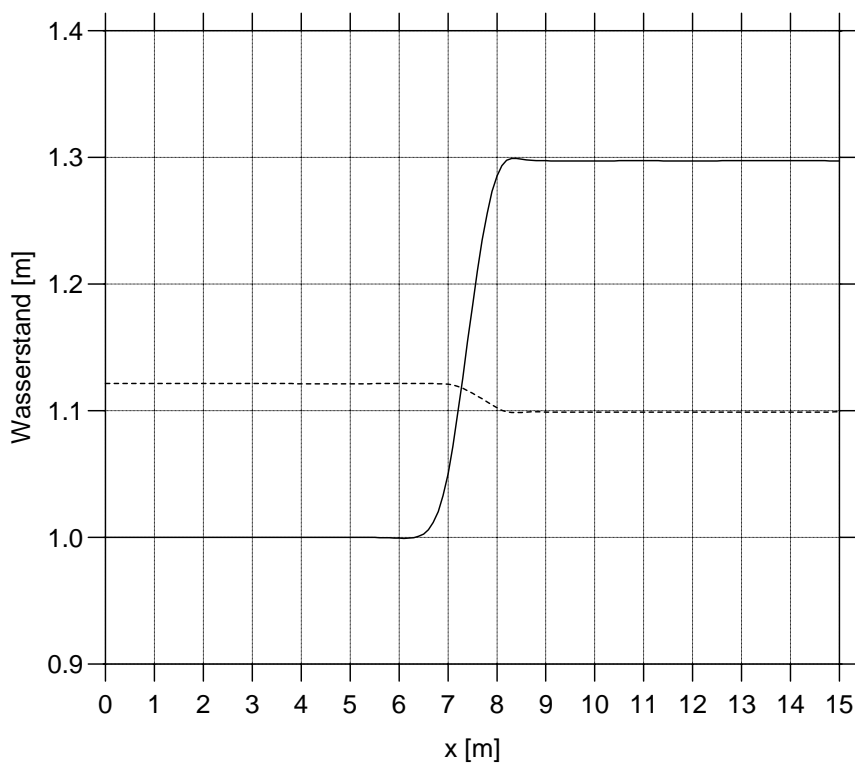


Kanalströmung strömend – schießend

Hydrodyn. Druck bei der Steigung 1:5 (schießend)



Wasserspiegellinie, strömend und schießend



Stabil bis
Steigung 1:1

Zusammenfassung

- ⇒ Ein Modell für Freispiegelströmungen – ohne Annahme der hydrostatischen Approximation – wurde entwickelt.
- ⇒ Der Anwendungsbereich ist wesentlich vergrößert.
- ⇒ Das Modell wurde sorgfältig verifiziert.
- ⇒ Alle Funktionalitäten des ursprünglichen Modells sind gewährleistet.
- ⇒ Anwendungen in diversen Bereichen sind sofort möglich (TELEMAC-System).

Ausblick

- ⇒ Aufnahme in die Standardbibliotheken von TELEMAC-System.
- ⇒ Praktische Anwendungen.
- ⇒ Verbesserung der Recheneffizienz (Netzadaptivität).
- ⇒ 3D-Turbulenzmodellierung in Freispiegelströmungen.